מטריצות(ואופרטורים) ופולינומים

# הגדרה

יהיו , , . נגדיר

# משפט

*מתקיים*

## הערה

אבל לא בהכרח , כנ"ל לגבי שאר הטענות.

# הגדרה

יהיו , . אומרים שf מאפס את A אם

# נסמן

*(קיצור של Annulator)*

## לדוגמה

אזי (לכל )

# משפט

כלומר לכל A קיים כך ש

## תרגיל

לחשב

## הוכחה

נתבונן ב מטריצות:  
בגלל ש. קבוצה הזאת היא ת"ל ⇦ קיימים סקלרים , , לא כולם =0, כך ש, כלומר ל.

# משפט(Caley-Hamilton)

ל מתקיים

## הערות

1. (כי )

## תרגיל

להבין מה הבעיה בהוכחה:

⇦

# משפט

יהי , אזי היא אידיאל.

## הוכחה

⇦ . הוכחה:   
 ⇦ . הוכחה:

## תוצאה

קיים פולינום כך ש

כלומר: אם אזי ,

# הגדרה

נקרא פולינום המינימלי של A.

# משפט

הוא פולינום עם דרכה מינימלית כך ש

# משפט

יהי . ע"ע של A אם ורק אם

## הוכחה

כיוון ⇦:, כך .

כיוון ⇨:  
לפי Caley-Hamilton ⇦ ⇦ ⇦ כל שורש של הוא גם שורש של .

## תוצאה

ל ו יש אותם שורשים(שהם ע"ע ב).

# משפט

A לכסינה אם ורק אם ל אין שורשים כפולים(כלומר לכל שורש של יש ריבוי 1 ⬄  
 כאשר כל ע"ע שונים של A.)

## הוכחה(⇦)

A לכסינה – קיימת P כך ש, ,

## תרגיל

יהי אזי

רמז: יש שתי שיטות:

1. להציב ולחשב
2. לבדוק ש עבור
3. לא צריך B!

⇨ - לא הוכחנו!

# דוגמה

⇦ (אבל לא 1, כי ל ול יש אותם שורשים)  
⇦ A לא לכסינה בגלל של0 יש ריבוי 2.

*⇦ A לכסינה.*

## הערה

(כי לפי Caley-Ham)

תת מרחב אינוואריאנטי

יהי אופרטור. תת מרחב נקרא T-אינוואריאנטי אם (כלומר לכל , )

# דוגמאות

1. , – תתי מרחב טריוויאלים.
2. : ⇦
3. תת מרחב עצמי: , , (אם אזי ואם איננו ע"ע אזי

# הגדרה

יהיו אופרטור ו תת מרחב T-אינוואריאנטי.  
האופרטור שמוגדרת ע"י ל נקרא צמצום של T על U.

## בדוגמאות:

# משפט

יהיו אופרטור ו תת מרחב אינוואריאנטי. קיים בסיס S בV כך ש:  
, , ו ל בסיס

## הוכחה

נבחר בסיס . נשלים עד בסיס , .

## תרגיל

יהי ע"ע ו תת מרחב עצמי. ⇦ (כלומר לחשב )